УДК 519.816

В. И. Волчихин, Е. Н. Прошкина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

Предлагается математическая модель системы принятия решений по управлению качеством образования. Модель разработана на основе метода вербального анализа решений. В статье рассматриваются математические аспекты реализации модели в среде MathCAD.

Введение

Необходимость принимать решения, для которых не удается полностью учесть предопределяющие их условия, а также последующее их влияние, встречается во всех областях техники, экономики, социальных наук. В связи с этим необходимо стремиться к оптимальному использованию имеющейся информации, чтобы, взвесив все возможные варианты решения, постараться найти наилучший.

Теоретический анализ

Под принятием решения понимается особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта из нескольких возможных. В процессе принятия решений Г. Саймон [1] выделяет три этапа: поиск информации, поиск и нахождение альтернатив и выбор лучшей альтернативы. На первом этапе собирается вся доступная на момент принятия решения информация: фактические данные, мнения экспертов. Там, где это возможно, строятся математические модели, проводятся социологические опросы. Второй этап связан с определением того, что можно, а чего нельзя делать в имеющейся ситуации, т.е. с определением вариантов решений (альтернатив). И уже третий этап включает в себя сравнение альтернатив и выбор наилучшего варианта (или вариантов) решения.

В современной науке о принятии решений центральное место занимают многокритериальные задачи выбора. Считается, что учет многих критериев приближает постановку задачи к реальной жизни [2]. Традиционно принято различать три основные задачи принятия решений:

1) упорядочение альтернатив;

2) распределение альтернатив по классам решений;

3) выделение лучшей альтернативы.

Выбор метода решения задачи напрямую зависит от степени ее структуризованности. В хорошо структуризованных проблемах существенные зависимости между основными характеристиками могут быть выражены количественно [2]. Для решения подобного рода задач можно использовать минимаксный критерий, критерий Байеса–Лапласа, критерий Гурвица, критерий Сэвиджа, методы исследования операций, человекомашинные процедуры, методы, основанные на многокритериальной теории полезности, метод аналитической иерархии.

Неструктуризованные проблемы характеризуются тем, что в их описании преобладают качественные факторы, трудно поддающиеся формализации, а количественные зависимости между этими факторами обычно не определены [2]. К данному виду можно отнести проблемы принятия решений о качестве образования.

Выделим общие черты неструктуризованных проблем:

– они являются проблемами уникального выбора;

– они связаны с неопределенностью в оценке альтернативных вариантов решения, что обусловлено нехваткой информации на момент решения проблемы;

– оценки альтернативных вариантов решения проблемы имеют качественный характер;

– оценки альтернатив по отдельным критериям могут быть получены только от руководителя или экспертов.

Методы вербального анализа решений позволяют сохранить качественное описание проблемы на всех этапах ее анализа. В них применяются качественные способы измерений и порядковые шкалы оценок по критериям.

С помощью методов вербального анализа решений могут быть решены следующие задачи:

– ранжирование многокритериальных альтернатив [3];

– выбор лучшей альтернативы из группы заданных многокритериальных альтернатив на основе их парного сравнения [4, 5];

– порядковая классификация многокритериальных альтернатив [6–9].

Таким образом, большое количество методов вербального анализа решений позволяет решать неструктуризованные задачи в качественном виде с учетом предпочтений руководителя. В методах на всех этапах используются вербальные переменные, понятные руководителю и экспертам. Методы не требуют какой-либо предварительной подготовки от руководителя.

Методика

Задачу принятия решения о качестве образовательных услуг можно отнести к задачам порядковой классификации альтернатив, обладающих совокупностью многих признаков. Использование большого количества показателей качества не позволяет руководителю сформулировать четкое правило оценки качества образовательных услуг, предоставляемых отдельной кафедрой, факультетом и вузом в целом. Для решения данной задачи на первом этапе необходимо получить представление о цели, которую преследует руководитель, а именно «повышение качества образования». Качество образования и качество вуза – понятия многомерные и многоаспектные, а потому необходимо четко определить критерии, имеющие шкалы оценок, упорядоченных от лучшей (первой) к худшей (последней).

Поскольку заранее неизвестно, какие именно характеристики будут иметь оцениваемые объекты, нужно определить правила принятия решений для объектов, характеризуемых любыми комбинациями.

Рассмотрим задачу порядковой классификации в следующей постановке:

T – свойство, отвечающее целевому критерию задачи («качество образования»);

$K_1, K_2, ..., K_N$ – критерии, по которым оценивается качество образования (средний балл студента, рейтинг преподавателя, критерии оценки удовлетворенности потребителей и т.д.);

$X_q = \{x_q^k\}$ – множество оценок (шкала) критерия K_q, упорядоченных по убыванию характерности свойства T; $\left|X_q\right| = S_q$, S_q – число значений оценок на шкале q-го критерия;

$Y = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$ – декартово произведение шкал критериев, определяющее множество всех возможных описаний объектов, подлежащих классификации;

$C = \{C_1, C_2, ..., C_M\}$ – множество классов решений, упорядоченных по убыванию выраженности свойства T («высокое качество образования», «приемлемое качество образования», «низкое качество образования»).

Каждый объект описывается набором оценок по критериям $K_1, K_2, ..., K_N$ и представляется в виде вектора вида $y_j = \left(y_{j1}, y_{j2}, ..., y_{jN}\right)$, где $y_{jq} \in X_q$, $j = 1, ..., S$ и $S = \left|Y\right| = \prod_{q=1}^{N} S_q$. Некоторые сочетания оценок по критериям являются недопустимыми. Поэтому будем рассматривать множество $Y^a \subseteq Y$ векторных оценок допустимых объектов.

Требуется, основываясь на предпочтениях руководителя, построить отображение множества допустимых объектов Y^a во множество классов C: $F: Y^a \to C$, которое должно быть полным и непротиворечивым.

Введем дополнительные понятия. На множестве критериальных оценок X_q $\left(q = 1, ..., N\right)$ определим отношение порядка $Q_q = \left\{\left(x_q^i, x_q^k\right) \mid i \le k\right\}$, а на множестве классов C – отношение порядка $Q_C = \left\{\left(C_g, C_h\right) \mid g \le h\right\}$, которые являются линейными рефлексивными асимметричными транзитивными отношениями. Введем на множестве возможных комбинаций оценок Y рефлексивное асимметричное транзитивное отношение доминирования: $Q = \left\{(y_i, y_j) \mid (y_{iq}, y_{jq}) \in Q_q, \ \forall q \in \{1, ..., N\}\right\}$ и антирефлексивное асимметричное транзитивное отношение строгого доминирования: $P = \{(y_i, y_j) \mid (y_i, y_j) \in Q, \ \exists q: \ y_{iq} \ne y_{jq}\}$. Сформулируем теперь требования к отображению F множества допустимых объектов Y^a во множество классов C. Отображение F должно быть полным $\forall y \in Y^a \ \exists k: \ F(y) = C_k$, т.е. $y \in Y_k$ и непротиворечивым $y_i \in Y_i, \ \ y_j \in Y_j, (y_i, y_j) \in Q \Rightarrow (C_i, C_j) \in Q_C \ \Rightarrow \ i \le j$.

Упорядоченность классов решений $C = \{C_1, C_2, ..., C_M\}$ позволяет построить процедуру опроса руководителя путем предъявления ему относительно небольшой части всех векторных оценок из множества Y для формирования полной классификации этого множества. Обозначим через G_i множество допустимых номеров классов для векторной оценки y_i. До начала опроса руководителя каждый вектор оценок y_i может принадлежать любому классу и, значит, для каждого вектора $y_i \in Y$ множество $G_i = \{1, 2, ..., M\}$. Пусть руководитель отнес векторную оценку y_i к классу Y_m $(1 \le m \le M)$. Естественно предположить, что в этом случае и любая другая векторная оценка, компоненты которой не менее характерны для свойства T, не может принадлежать менее предпочтительному классу. Аналогично, векторная оценка, компоненты которой не более характерны для свойства T, чем у векторной оценки y_i, не может принадлежать более предпочтительному классу. Следовательно, непосредственная классификация только одной векторной оценки из Y может привести к косвенной классификации некоторых других оценок. Число косвенно классифицированных векторных оценок зависит от того, какая векторная оценка предъявляется руководителю, и от того, к какому классу он ее отнесет. Для определения, насколько информативной, в указанном смысле, будет та или иная векторная оценка при предъявлении ее руководителю, можно подсчитать число косвенно классифицируемых векторных оценок для каждого возможного ответа.

Показатель p_{im}, оценивающий возможность отнесения векторной оценки y_i к классу Y_m, можно ассоциировать с близостью этой векторной оценки к представителям класса Y_m.

Таким образом, для каждой векторной оценки можно определить оценку ее информативности при каждом возможном ответе руководителя и оценку ее близости к каждому из допустимых для нее классов, характеризующую возможность ее отнесения к соответствующему классу. Используя эти два показателя, можно построить единый количественный индекс информативности Φ_i каждой еще не классифицированной векторной оценки $y_i \in Y$, определив его как $\Phi_i = \sum_{m \in G_i} p_{im} g_{im}$, где g_{im} – число векторных оценок из множества Y, принадлежность которых к некоторому классу Y_m становится известной, если руководитель отнесет вектор y_i к этому классу.

Введем меру близости векторной оценки y_i к некоторому классу Y_m, которая будет характеризовать «вероятность» отнесения руководителем вектора y_i к классу Y_m. Назовем центром непустого класса Y_m векторную оценку $c_m = (c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mN})$, каждая из N компонент которой равна округленному среднему арифметическому значению соответствующих компонент векторных оценок из класса Y_m и определяется формулой

$$c_{mq} = \left[\sum_{y_i \in Y_m} y_{iq} \big/ |Y_m| \right], \; q = 1, ..., N . \tag{1}$$

Определим расстояние d_{im} от векторной оценки $y_i \in Y$ до центра класса C_m следующим выражением:

$$d_{im} = \sum_{q=1}^{N} \left| y_{iq} - c_{mq} \right| . \tag{2}$$

Обозначим через $d_{\max}$ максимально возможное расстояние между двумя векторными оценками, принадлежащими множеству Y:

$$d_{\max} = \sum_{q=1}^{N} (S_q - 1), \tag{3}$$

где S_q – число градаций на шкале критерия K_q.

Назовем мерой близости p_{im} вектора $y_i \in Y$ к классу Y_m величину

$$p_{im} = \frac{d_{\max} - d_{im}}{|G_i| d_{\max} - \sum_{s \in G_i} d_{is}}. \tag{4}$$

Отсюда $0 \le p_{im} \le 1$ и $\sum_{m \in G_i} p_{im} = 1$.

На очередной итерации руководителю предъявляется векторная оценка y_i, для которой $\Phi_i = \max_{y_k \in Y_g} \Phi_k$, $Y_g = \{ y_k \mid |G_k| > 1 \}$.

После того как руководитель классифицирует векторную оценку y_i, множества G_j для $y_j \in Y_g$ таких, что либо $(y_i, y_j) \in P$, либо $(y_j, y_i) \in P$, преобразуются в зависимости от класса, в который ЛПР отнес эту векторную оценку. Затем вновь определяется множество Y_g. Если $Y_g \ne 0$, то для $y_i \in Y_g$ пересчитываются значения Φ_i и процедура повторяется. Если $Y_g = 0$, то разбиение множества Y на требуемые классы решений $C = \{C_1, C_2, ..., C_M\}$ построено.

Данная процедура позволяет уменьшить число обращений к руководителю. Для оценки ее эффективности было проведено статистическое моделирование в среде MathCAD.

Экспериментальная часть

Для генерации исходного разбиения множества векторов на классы был использован следующий алгоритм. Задаем число критериев *N*, число значений на шкале каждого критерия $S_q\,(q = 1, ..., N)$ и число классов *M*. Формируем множество векторов, представляющих все возможные сочетания оценок по критериям (рис. 1).

Известно, что вектор, имеющий первые оценки по всем критериям, принадлежит классу C_1, вектор, имеющий последние оценки по всем критериям, – классу C_M. Затем определяется вектор $y_i \in Y$, который должен быть предъявлен руководителю для классификации: для каждого вектора $y_i \in Y$ вычисляются показатели p_{im} и g_{im} (рис. 2, 3).

По показателям p_{im} и g_{im} вычисляется индекс информативности Φ_i и определяется вектор, который следует предъявить руководителю (рис. 4).

Ответ руководителя моделируется с помощью датчика псевдослучайных чисел. В соответствии с отношением доминирования P корректируются множества допустимых номеров классов G_j для всех векторов $y_j \in Y$, принадлежность которых к некоторому классу не была еще определена. Далее пересчитываются координаты центров классов (рис. 5).

```
y := | for q ∈ 0,1..(N − 1)
     |   v_q ← 1
     | for i ∈ 0,1..(K − 1)
     |   | if i > 0
     |   |   | k ← 1
     |   |   | for q ∈ N − 1, N − 2..0
     |   |   |   if k = 1
     |   |   |     | v_q ← v_q + k
     |   |   |     | k ← 0
     |   |   |     | if v_q > S_{0,q}
     |   |   |     |   | v_q ← 1
     |   |   |     |   | k ← 1
     |   | for q ∈ 0,1..(N − 1)
     |   |   y_{i,q} ← v_q
     | y
```

Рис. 1

```
g(y,G) := | for i ∈ 0,1..(K − 1)
          |   for m ∈ 0,1..(M − 1)
          |     | g_{i,m} ← 0 if i = 0
          |     | g_{i,m} ← 0 if i = K − 1
          |     | otherwise
          |     |   | g_{i,m} ← 0
          |     |   | for j ∈ 1,2..(K − 2)
          |     |   |   | g_{i,m} ← Class_end(y,g,i,m,j) if m = M − 1
          |     |   |   | g_{i,m} ← Class_home(y,g,i,m,j) if m = 0
          |     |   |   | g_{i,m} ← Class_middle(y,g,i,m,j) otherwise
          |     |   |   | g_{i,m}
          |     |   | g_{i,m}
          |     | g_{i,m}
          | g
```

Рис. 2

```
p(c,y) := | dmax ← Σ_{q=0}^{N−1} (S_{0,q} − 1)
          | for i ∈ 0,1..(K − 1)
          |   | Gi ← Σ_{m=0}^{M−1} G_{i,m}
          |   | for m ∈ 0,1..(M − 1)
          |   |   | d_{i,m} ← Σ_{q=0}^{N−1} |y_{i,q} − c_{m,q}|
          |   |   | p_{i,m} ← (dmax − d_{i,m}) / (Gi·dmax − Σ_{s=0}^{M−1} Σ_{q=0}^{N−1} |y_{i,q} − c_{s,q}|)
          | p
```

Рис. 3

```
Number(Φ,y) := | j ← 0
               | Pr ← 0
               | for i ∈ 0,1..(K − 1)
               |   if Φ_i > Pr ∧ y_{i,N} = 0
               |     | j ← i
               |     | Pr ← Φ_i
               | j
```

Рис. 4

```
zentr(y) := | for m ∈ 0,1..M − 1
            |   | col ← 0
            |   | for q ∈ 0,1..(N − 1)
            |   |   c[m,q] ← 0
            |   | for i ∈ 0,1..(K − 1)
            |   |   c ← Count_c(y,c,i,m,col) if y[i,N] = m + 1
            |   | for q ∈ 0,1..(N − 1)
            |   |   c[m,q] ← c[m,q] / col if col > 0
            | for m ∈ 0,1..M − 1
            |   | col ← 0
            |   | for q ∈ 0,1..(N − 1)
            |   |   col ← col + 1 if c[m,q] = 0
            |   | if col = N
            |   |   | h ← m
            |   |   | s ← poisk_s(c,m)
            |   |   | t ← poisk_t(c,m)
            |   |   | for q ∈ 0,1..(N − 1)
            |   |   |   c[h,q] ← (c[t,q] + c[s,q]) / (t − s)
            |   | c[h,q]
            | c
```

Рис. 5

Процедура повторяется до тех пор, пока для каждой векторной оценки из множества Y не будет определена принадлежность к одному из заданных классов.

Результаты

Число обращений к датчику псевдослучайных чисел характеризует число вопросов к руководителю для построения данного разбиения на основе предложенной процедуры опроса. При этом среднее число векторов, предъявленных руководителю для классификации, при $N = 4$ и $S = (3 \quad 3 \quad 3 \quad 3)$ равно 8 при мощности $S = 81$ множества Y. Это означает, что предложенная процедура значительно уменьшает число предъявлений по сравнению с мощностью множества Y.

На основе рассмотренной процедуры был разработан прототип системы принятия решений по управлению качеством образования. С его помощью была решена задача классификации факультетов университета по результатам мониторинга удовлетворенности преподавателей.

Решение задачи состояло в том, чтобы на основе предпочтений представителя от руководства университета классифицировать факультеты для применения в последующем корректирующих действий.

На первом этапе были занесены исходные данные (рис. 6).

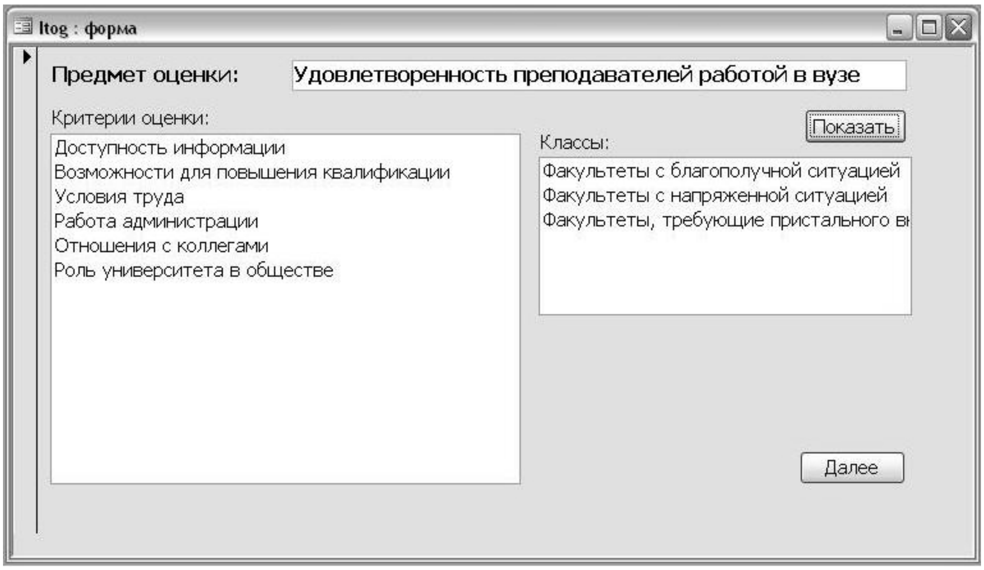

Рис. 6 Исходные данные

Затем путем опроса руководителя было сформировано решающее правило. По каждому факультету были занесены реальные оценки по критериям и получен результат (рис. 7).

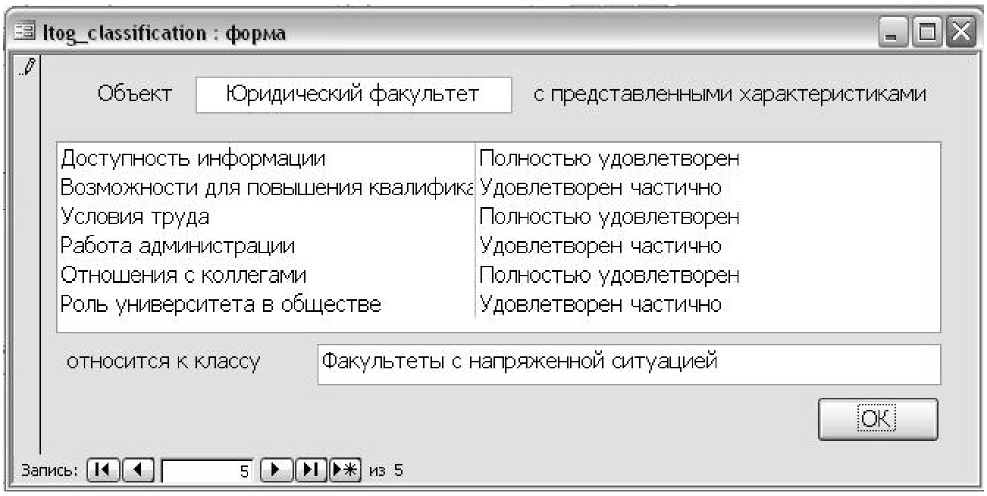

Рис. 7 Результат классификации

Таким образом, рассмотренная процедура позволяет сформировать правило принятия решений по управлению качеством образования до появления реальных объектов на качественном уровне без каких-либо преобразований словесных формулировок в количественные значения.

Список литературы

1. **Simon, H. A.** The New Science of Management Decision / H. A. Simon. – N.Y. : Harper and Row Publishers, 1960.
2. **Ларичев, О. И.** Вербальный анализ решений / О. И. Ларичев. – М. : Наука, 2006. – 182 с.
3. **Larichev, O. I.** Ranking multicriteria alternatives: The method ZAPROS III / O. I. Larichev // Europ. J. Operat. Res. – 2001. – V. 131. – № 3. – P. 550–558.
4. **Larichev, O. I.** Numerical and verbal decision analysis used for the problems of resources allocation in Actic / O. I. Larichev, R. Brown // J. Multi-Criteria Decision Anal. – 2000. – V. 9. – № 6. – P. 263–274.
5. **Кочин, Д.** Вербальный метод определения эффективности инвестиций в строительстве / Д. Кочин, О. Ларичев, Л. Устинович // Computer Modell. And New Technol. – 2003. – V. 7. – № 2. – P. 37–47.
6. **Ларичев, О. И.** Задача классификации в принятии решений / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 3. – С. 567–570.
7. **Ларичев, О. И.** Качественные методы принятия решений / О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. – М. : Физматлит, 1996. – 208 с.
8. **Мошкович, Е. М.** Конструктивный поиск и устранение противоречий в предпочтениях лица, принимающего решения при разбиении многомерных альтернатив на конечное число классов / Е. М. Мошкович // Проблемы и процедуры принятия решений при многих критериях : сборник трудов / под ред. С. В. Емельянова, О. И. Ларичева. – М. : ВНИИСИ, 1982. – № 6. – С. 73–80.
9. **Кочин, Д. Ю.** Метод классификации заданного множества многокритериальных альтернатив / Д. Ю. Кочин // Методы поддержки принятия решений : сборник трудов Ин-та систем. анализа РАН / под ред. О. И. Ларичева. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – С. 4–18.